

Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра автоматизації
технологічних процесів
і виробництв

Лабораторна робота № 6
з курсу
”Гідрогазодинаміка”

Моделювання нестационарного
руху рідини та газу у
середовищі FreeFem++

Тернопіль 2018

Методичні вказівки до лабораторної роботи №6 "Моделювання нестационарного руху рідини та газу у середовищі FreeFem++" з курсу "Гідрогазодинаміка". Шкодзінський О.К., Пісьціо В.П., Тернопіль: ТНТУ, 2018 - 8 с.

Для студентів напряму підготовки: 151 "Автоматизація та комп'терно-інтегровані технології"

Автори: Шкодзінський О.К., Пісьціо В.П.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 29.08.2018 року)

Тема роботи

Моделювання нестационарного руху рідини та газу у середовищі FreeFem++

Мета роботи

Ознайомитись із методом моделювання у середовищі FreeFem++ нестационарного руху рідин.

Теоретичні відомості

Продемонструємо зведення нестационарної задачі протікання рідини до послідовності стаціонарних задач на наступному прикладі. Розглянемо задачу про протікання в'язкої рідини, що не стискається у прямокутній області з непроникними стінками у випадку коли, на одній із сторін прямокутника задана стала дотична швидкість u_0 .

Рівняння Нав'є-Стокса для опису поведінки в'язкої нестисливої рідини при відсутності переміщень по третій координаті мають вигляд (див., наприклад, [1])

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u_i, \quad (1)$$

де ρ - густина рідини, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - кінематична в'язкість, μ - динамічна в'язкість. Для замикання

системи рівнянь використовують рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } \nabla \cdot (\rho u) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2). \quad (3)$$

У випадку сталої густини рівняння нерозривності може бути записано у формі:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 = 0. \quad (4)$$

Крайові умови для прямокутника $D=[0, a] \times [0, b]$ задамо у формі:

для всіх границь крім верхньої виконується умова прилипання: $u_1 = u_2 = 0$;

для верхньої границі $u_1 = u_0$, $u_2 = 0$.

Моделювання нестационарних рухів рідини

На відміну від задач, що розглядалися у попередніх лабораторних роботах, тепер необхідно проводити дискретизацію задачі у часі і апроксимувати значення похідної від компонентів швидкості.

Припустимо, що нам відомий розв'язок u_i у початковий момент часу $t = t_n$, позначимо його через $p^{<n>}$, $u^{<n>}_i$. Ра аналогією позначимо через $p^{<n+1>}$, $u^{<n+1>}_i$ розв'язок у момент часу $t_{n+1} = t_n + \tau$.

Апроксимуючи похідну за часом "назад" маємо:

$$\frac{\partial u^{<n+1>}}{\partial t} \approx \frac{u^{<n+1>} - u^{<n>}}{\tau} \quad (5)$$

Тоді маємо рівняння для визначення переміщень:

$$\frac{u^{<n+1>}_i}{\tau} - \frac{u^{<n>}_i}{\tau} + u^{<n>}_1 \frac{\partial u^{<n>}_i}{\partial x_1} + u^{<n>}_2 \frac{\partial u^{<n>}_i}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{<n>}}{\partial x_i} + \nu \Delta u^{<n>}_i \quad (6)$$

Проте чисельні експерименти показують, що значно краще доданки у правій частині відносити до "нового" моменту часу це дозволяє понизити необхідну гладкість апроксимації переміщень і крім того покращує стабільність розв'язку. Отже остаточно отримуємо:

$$\frac{u^{<n+1>}_i}{\tau} - \frac{1}{\tau} \left(u^{<n>}_i - \tau u^{<n>}_1 \frac{\partial u^{<n>}_i}{\partial x_1} - \tau u^{<n>}_2 \frac{\partial u^{<n>}_i}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{<n+1>}}{\partial x_i} + \nu \Delta u^{<n+1>}_i \quad (7)$$

У середовищі FreeFem++ для обчислення виразу $\nu^{<n>} - \tau u^{<n>}_1 \frac{\partial \nu^{<n>}}{\partial x_1} - \tau u^{<n>}_2 \frac{\partial \nu^{<n>}}{\partial x_2}$ може бути

використаний спеціальний оператор convect:

$$\nu^{<n>} - \tau \left(u^{<n>}_1 \frac{\partial \nu^{<n>}}{\partial x_1} + u^{<n>}_2 \frac{\partial \nu^{<n>}}{\partial x_2} \right) = \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, \nu^{<n>}) \quad (8)$$

Тоді рівняння, що описують переміщення можуть бути записані у виді:

$$\frac{u^{<n+1>}_i}{\tau} - \frac{1}{\tau} \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, u^{<n>}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{<n+1>}}{\partial x_i} + v \Delta u^{<n+1>}_i \quad (9)$$

Рівняння нерозривності не має у собі похідних за часом і поки що залишається незмінним

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u^{<n+1>}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u^{<n+1>}_2 = 0. \quad (10)$$

Для розв'язування задачі, тобто визначення швидкостей і тиску використаємо спеціальний метод. Необхідність використання спеціального методу для розв'язку рівнянь пов'язана з тим, що два рівняння (9) містять три незалежні змінні u^{n+1}_1 , u^{n+1}_2 , та $p^{n+1}(x)$, а рівняння нерозривності не може бути записано через тиск. Для уникнення проблем додаємо у рівняння нерозривності невелику складову, котра буде пропорційна тиску.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u^{<n+1>}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u^{<n+1>}_2 = \frac{\varepsilon}{\rho} p^{<n+1>}. \quad (11)$$

де ε - мала величина (можна, наприклад, вважати, що $\varepsilon = 10^{-6} \dots 10^{-9}$). Запишемо тепер слабке формулювання задачі:

$$\begin{aligned} NS(u, p, v, q) = & \int_S \frac{1}{\tau} (u^{<n+1>}_1 v_1 + u^{<n+1>}_2 v_2) ds - \int_S \frac{v_1}{\tau} \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, u^{<n>}_1) ds \\ & - \int_S \frac{v_2}{\tau} \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, u^{<n>}_2) ds - \frac{\varepsilon}{\rho} \int_S q p ds \\ & + \frac{1}{\rho} \int_S v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} p + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} p ds - v \int_S v_1 \Delta u_1 + v_2 \Delta u_2 ds = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Користуючись формулою Гріна маємо:

$$\begin{aligned} NS(u, p, v, q) = & \int_S \frac{1}{\tau} (u^{<n+1>}_1 v_1 + u^{<n+1>}_2 v_2) ds - \int_S \frac{v_1}{\tau} \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, u^{<n>}_1) ds \\ & - \int_S \frac{v_2}{\tau} \text{convect}([u^{<n>}_1, u^{<n>}_2], -\tau, u^{<n>}_2) ds - \frac{\varepsilon}{\rho} \int_S q p^{<n+1>} ds \\ & + \frac{1}{\rho} \int_S v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} p^{<n+1>} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} p^{<n+1>} ds + v \int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial u^{<n+1>}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial u^{<n+1>}_1}{\partial x_2} ds + \\ & + v \int_S \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial u^{<n+1>}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial u^{<n+1>}_2}{\partial x_2} ds - v \int_{\Gamma_1} v_1 \frac{\partial u^{<n+1>}_1}{\partial n} + v_2 \frac{\partial u^{<n+1>}_2}{\partial n} dl = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

де Γ_1 - границя області. Зауважимо, що у останньому співвідношенні, лише члени із оператором $\text{convect}()$ використовують "старі" значення швидкостей. Отже для зменшення обсягу даних, що зберігаються можна спочатку обчислити значення операторів $\text{convect}()$, а потім їх використовувати для обчислень нового поля тиску і швидкостей. Зауважимо, що так як оператор on вводить штрафну функцію для задоволення граничних умов на всій границі можна вважати, що інтеграл по границі Γ можна не враховувати у всіх точках де задані граничні умови оператором $\text{on}()$.

Відповідний код FreeFem++ для визначення поля швидкостей і тиску показаний нижче:

```
problem NS ([u1,u2,p],[v1,v2,q],init=i) =
  int2d(Th)(
    (1/tau)*( u1*v1 + u2*v2)
    - p*q*epsr/rho
    + (v1*dx(p)+ v2*dy(p))/rho
    + dx(u1)*q+ dy(u2)*q
    + nu * (dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1))
    + nu * (dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2))
  )
+ int2d(Th)(
```

```

- (1/tau)*convect([up1,up2],-dt,up1)*v1
- (1/tau)*convect([up1,up2],-dt,up2)*v2 )
+ on(3,u1=1,u2=0)
+ on(1,2,4,u1=0,u2=0);

```

//Оператор problem аналогічний за діями оператору solve, проте
 // не вирішує задачу у момент оголошення задачі.
 // Для вирішення задачі необхідно викликати її за ім'ям.

У випадку необхідності, можна побудувати поле ліній потоку, що, як відомо, може бути визначено як $\text{rot } \psi = u$ або із більшою гладкістю як [3]:

$$-\Delta\psi = \omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{або} \quad -\Delta\psi + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0. \quad (14)$$

У слабкій формі це рівняння може бути записано у вигляді:

$$\text{St}(\psi, q) = - \int_S q \Delta\psi \, ds + \int_S q \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) ds = 0. \quad (15)$$

Скориставшись формулою Гріна отримаємо:

$$\text{St}(\psi, q) = \int_S \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) ds + \int_S q \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) ds - \int_{\Gamma} \left(q \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dl = 0. \quad (16)$$

Отже маємо наступний код:

```

problem streamlines(psi,q) =
  int2d(Th)( dx(psi)*dx(q) + dy(psi)*dy(q))
  + int2d(Th)( -q*(dy(u1)-dx(u2)))
  + on(1,2,3,4,psi=0);

```

Реалізація алгоритму у FreeFem++

Приведемо повний код програми у FreeFem++, що будує течію у порожнині

```

mesh Th=square(8,8); // задання області розміром [0,1]x[0,1]
// і побудова у ній сітки 8x8
fespace Xh(Th,P2);fespace Mh(Th,P2);
Xh u1, u2, v1, v2, psi,phi;
Mh p,q;
real epsr = 1e-8;
problem streamlines(psi,phi) =
  int2d(Th)( dx(psi)*dx(phi) + dy(psi)*dy(phi))
  + int2d(Th)( -phi*(dy(u1)-dx(u2)))
  + on(1,2,3,4,psi=0);
int i=0;
real nu=1./100.;//в'язкість
real tau =0.1; //крок за часом
real rho = 1000; //густина
Xh up1,up2;
u1=0;u2=0;
problem NS ([u1,u2,p],[v1,v2,q],init=i) =
  int2d(Th)(
    (1/tau)*( u1*v1 + u2*v2)
    + nu * (dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1))
    + nu * (dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2))
    - p*q*epsr/rho
    + (v1*dx(p)+ v2*dy(p))/rho
    + dx(u1)*q+ dy(u2)*q
  )
  + int2d(Th) (
    -(v1/tau)*convect([up1,up2],-tau,up1)
    -(v2/tau)*convect([up1,up2],-tau,up2)
  )

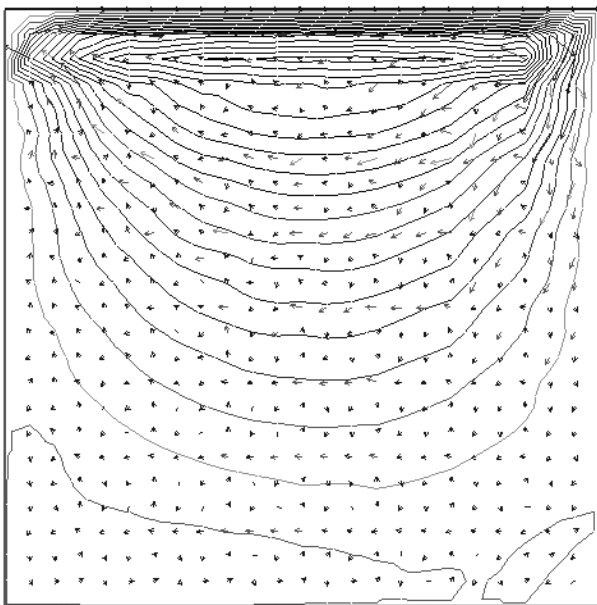
```

```

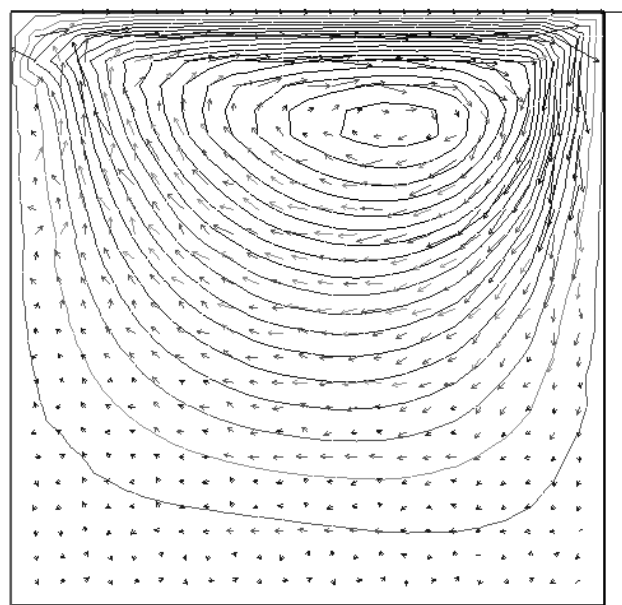
    )//
    + on(3,u1=1,u2=0)
    + on(1,2,4,u1=0,u2=0);
for (i=0;i<=500;i++){//основний цикл розрахунку
{
    up1=u1; up2=u2;//Зберігаємо попередні значення швидкостей
    NS;                //Обчислюємо нові
    if((i % 10)==0)//Кожний 20-й раз обчислюємо поле ліній потоку
    {streamlines; // і виводимо їх разом із векторами швидкостей
      plot(psi,[u1,u2],coef=0.2,
          cmm=" [u1,u2] and psi " + tau*i,wait=1);
    }
}
}

```

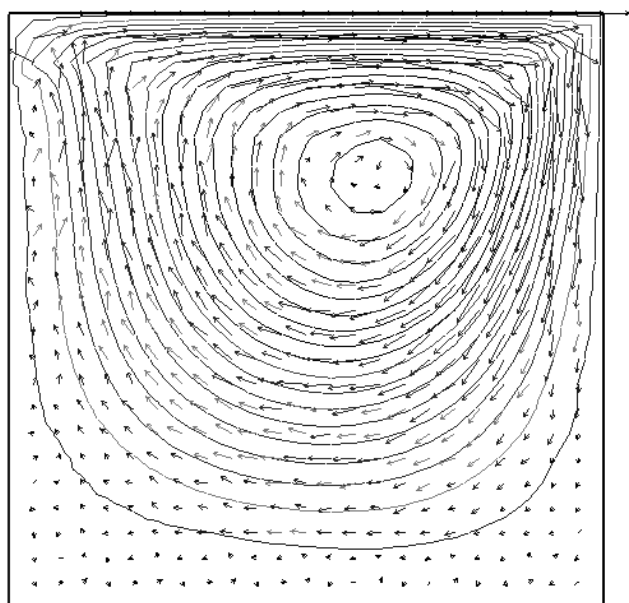
Результати обчислень наведені на наступному рисунку.



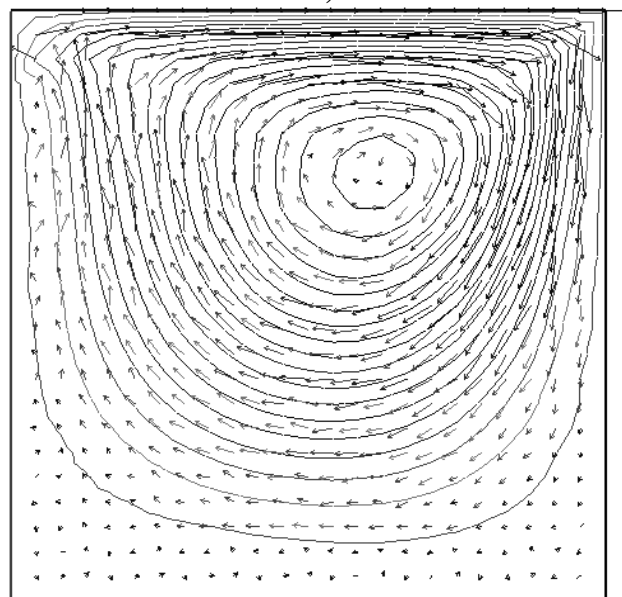
а)



б)



в)



г)

Рис. 1. Поле швидкостей та лінії потоку у моменти $t = 0$ (а), $t = 1$ (б), $t = 10$ (в) та $t = 50$ секунд модельного часу

Завдання

1. Запустити запропоновану програму і добитись її роботоздатності.
2. Розібратись із запропонованим кодом, і ознайомитись із способом апроксимації похідних по часу.
3. Задати початкові умови у вигляді руху рідини по колу із швидкістю, що спадає на границі до нуля.
4. Побудувати поле розподілу швидкостей для неквадратної області (за вибором).

Контрольні питання

1. Наведіть обмеження, що були використані для виведення рівнянь, котрі описують модельну задачу.
2. Що таке функція потоку?
3. Як можна апроксимувати похідні по часу у FreeFem++?
4. Які граничні умови задаються у модельній задачі?
5. Що здійснює оператор `convent` у мові FreeFem++?

Література

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
3. Методичні вказівки до лабораторної роботи №4 "Моделювання найпростіших видів руху рідини та газу у середовищі FreeFem++" з курсу "Гідрогазодинаміка". Автори: Пісьціо В.П., Шкодзінський О.К., Тернопіль: ТНТУ, 2018 - 18 с.
4. Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Version 3.17-1. <http://www.freefem.org/ff++>.
5. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии/Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. - 256 с.
6. Пакет конечных элементов FreeFem++ (Учебное пособие) Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. - 78.

Зміст

Тема роботи.....	3
Мета роботи	3
Теоретичні відомості.....	3
Моделювання нестационарних рухів рідини	3
Реалізація алгоритму у FreeFem++	5
Завдання.....	7
Контрольні питання.....	7
Література.....	7
Зміст.....	8